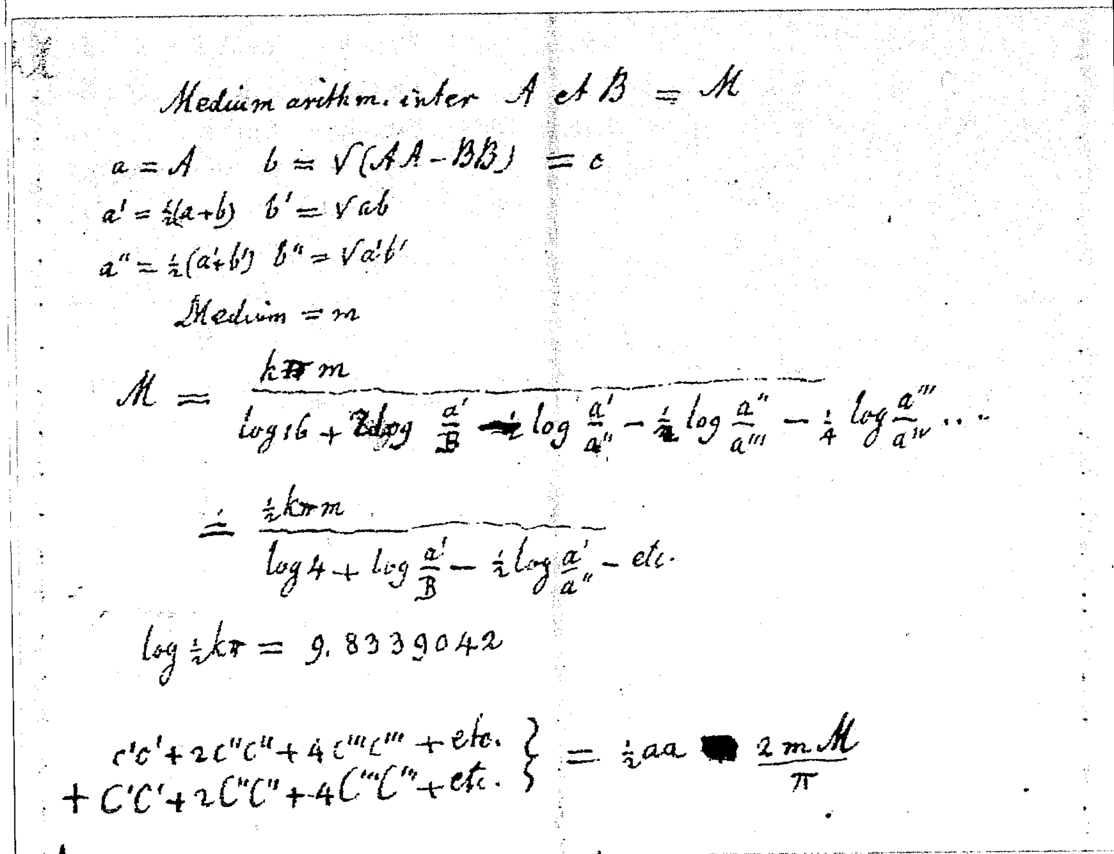
wird das Resultat noch verschönert, indem aus dem Argumentpaar $(\sqrt{2}, 1)$ in das Paar $(1, 1/\sqrt{2})$ umgerechnet wird. Und dann ist man auch schon bei der Formel (7.1) und dem Gauß-AGM-Algorithmus.

Das Original

Wir haben lange suchen und warten müssen, aber jetzt haben wir sie: die Originalformel von Gauß, die dem Gauß-AGM-Algorithmus zugrunde liegt. Sie steht auf Seite 6 des „Handbuchs 6", *Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik, Angefangen im May 1809.*

Dieses kleine Werk befindet sich im Besitz der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (Signatur: Cod. Ms. C. Fr. Gauss, Handbuch 6). Als wir danach fragten, war es in einem jämmerlichen Zustand, so daß die Abteilung für Handschriften und seltene Drucke das Handbuch erst restaurieren lassen mußte, bevor wir jetzt (mit ihrer freundlichen Zustimmung) erstmals die Formel in Gauß' eigener Handschrift zeigen können:


Medium arithm. inter A et B = M

$a = A \quad b = \sqrt{(AA - BB)} = c$

$a' = \frac{1}{2}(a+b) \quad b' = \sqrt{ab}$

$a'' = \frac{1}{2}(a'+b') \quad b'' = \sqrt{a'b'}$

Medium = m

$$M = \frac{k\pi m}{\log 16 + 2\log\frac{a'}{B} - \frac{1}{2}\log\frac{a'}{a''} - \frac{1}{4}\log\frac{a''}{a'''} - \frac{1}{4}\log\frac{a'''}{a^{iv}} \ldots}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}k\pi m}{\log 4 + \log\frac{a'}{B} - \frac{1}{2}\log\frac{a'}{a''} - etc.}$$

$\log \frac{1}{2}k\pi = 9.8339042$

$$\left.\begin{array}{r} c'c' + 2c''c'' + 4c'''c''' + etc. \\ + C'C' + 2C''C'' + 4C'''C''' + etc. \end{array}\right\} = \frac{1}{2}aa - \frac{2mM}{\pi}$$

Die Formel in der letzten Zeile

$$\left.\begin{array}{r} c'c' + 2\,c''c'' + 4\,c'''c''' + \text{etc.} \\ + C'C' + 2\,C''C'' + 4\,C'''C''' + \text{etc.} \end{array}\right\} = \frac{1}{2}aa - \frac{2mM}{\pi} \tag{7.16}$$

also ist die Gesuchte! Sie ist sogar allgemeiner als (7.1). Man braucht in ihr lediglich $a = A = 1$ und $b = B = 1/\sqrt{2}$ zu setzen, wodurch sich $m = M$ und $c^2 = C^2 = a^2 - b^2 = 1/2$ ergibt. Wenn man dann noch statt M und m $AGM(1/\sqrt{2})$ setzt und statt jedes Strichs einen Index schreibt, also zum Beispiel c_3 statt c''', so wird die Gauß-Formel zu:

$$2\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1} c_j^2 = \frac{1}{2} - \frac{2(\mathrm{AGM}(1, 1/\sqrt{2}))^2}{\pi} \tag{7.17}$$

und daraus folgt sofort die Formel (7.1).